

Chapitre 2

Ensembles

Plan du chapitre

1	Introduction	1
1.1	Définitions, ensembles usuels	1
1.2	Construction d'ensembles	2
1.3	Nombre d'éléments d'un ensemble	3
1.4	Les intervalles de $\mathbb{R}$	4
1.5	Ensembles produits	5
2	Opérations sur les ensembles	6
2.1	Inclusion et appartenance	6
2.2	☞☞☞ Montrer une inclusion ou une égalité d'ensembles	6
2.3	Ensemble des parties de E	8
2.4	Opérations sur les parties d'un ensemble	9
2.5	Propriétés des opérations $\cap$, $\cup$ et passage au complémentaire	10
2.6	Partition d'un ensemble	11
2.7	Opérations avec une infinité d'ensembles	12
3	Complément : ensemble et logique	13
4	Méthodes pour les exercices	14

Hypothèse

Dans tout ce chapitre, E , F et G sont des ensembles quelconques.

1 Introduction

1.1 Définitions, ensembles usuels

La notion d'ensemble est une notion fondamentale dans le formalisme moderne des mathématiques. On ne cherchera pas à en donner une définition précise, et on s'en tiendra à une définition "intuitive".

Définition 2.1

Un ensemble est un regroupement d'objets mathématiques (entiers, réels, fonctions, ...). Les objets contenus dans un ensemble sont appelés des éléments de cet ensemble.

- Si deux ensembles E et F ont exactement les mêmes éléments, on dira que E et F sont égaux et on écrira $E = F$. Sinon, on écrira $E \neq F$.

- Si x est un élément d'un ensemble E , on écrira $x \in E$. Sinon, on écrira $x \notin E$.

Exemple 1 (Ensembles usuels).

1. $\mathbb{N}$ est l'ensemble des entiers naturels, càd des entiers positifs.
2. $\mathbb{Z}$ est l'ensemble des entiers relatifs, càd de tous les entiers, quel que soit leur signe.
3. $\mathbb{Q}$ est l'ensemble des nombres rationnels, càd de tous les nombres qui s'écrivent sous la forme d'une fraction $\frac{a}{b}$ avec $a, b \in \mathbb{Z}$ et b non nul. Par exemple, $\frac{-1}{7} \in \mathbb{Q}$ mais $\pi \notin \mathbb{Q}$.
4. $\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres réels, donc essentiellement tous les nombres qu'on peut former avec un nombre de décimales fini ou infini : on y trouve tous les rationnels mais aussi $\sqrt{2}$, π , et bien d'autres¹.
5. D'autres ensembles usuels seront vus ultérieurement (intervalles, $\mathbb{D}$, $\mathbb{C}$, ...)

1.2 Construction d'ensembles

En dehors des ensembles usuels, on utilise toujours des *accolades* pour désigner un ensemble. Il existe trois notations différentes et toutes sont utiles :

1) Par énumération

On peut écrire explicitement tous les éléments de l'ensemble, séparés par des virgules. On peut écrire des pointillés pour prolonger un motif.

Exemple 2.

$$\begin{aligned} A &= \{-1, 0, 1\} & B &= \{0, 2, 4, 6, \dots, 100\} \\ \mathbb{N} &= \{0, 1, 2, 3, \dots\} & \mathbb{Z} &= \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\} \end{aligned}$$

Remarque. Contrairement aux listes de Python, un ensemble ne tient pas compte des répétitions ni de l'ordre de ses éléments : ainsi $\{1, 2\} = \{2, 1\} = \{2, 1, 1\} = \{1, 2, 2, 2, \dots\}$

2) Avec une condition

Définition 2.2

Soit P un prédicat défini sur E . On note :

$$\{x \in E \mid P(x)\}$$

comme étant l'ensemble des éléments de E qui vérifient P .

Ainsi, un élément x de E sera dans cet ensemble si et seulement si l'assertion $P(x)$ est vraie. L'assertion $P(x)$ est donc une *condition* que doit vérifier x pour être dans l'ensemble. La barre verticale se lit "tel que". Ainsi, l'ensemble $\{x \in E \mid P(x)\}$ se lit naturellement :

L'ensemble des (éléments) $x \in E$ tels que $P(x)$ (est vraie)

Exemple 3.

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^* &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\} & \text{idem pour } \mathbb{N}^*, \mathbb{Z}^*, \mathbb{Q}^* \\ \mathbb{R}_+ &= \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\} & \text{idem pour } \mathbb{R}_- \end{aligned}$$

1. La définition précise de $\mathbb{R}$ est hors-programme en CPGE.

3) Avec un paramètre

Définition 2.3

Soit f une fonction définie sur E . On note :

$$\{f(x) \mid x \in E\}$$

comme étant l'ensemble des valeurs prises par $f(x)$ lorsque le paramètre x parcourt E .

Cette notation se lit presque mieux de droite à gauche : il faut d'abord s'imaginer que x parcourt toutes les valeurs de E , et pour chaque valeur, on calcule $f(x)$: les différentes valeurs de $f(x)$ obtenues forment l'ensemble $\{f(x) \mid x \in E\}$. L'ensemble $\{f(x) \mid x \in E\}$ se lit naturellement :

$$\text{L'ensemble des (valeurs) } f(x) \begin{cases} \text{lorsque } x \text{ parcourt } E \\ \text{telles que } x \in E \end{cases}$$

Exemple 4. $\circ \mathbb{R}_+ = \{x^2 \mid x \in \mathbb{R}\}$

$\circ$ L'ensemble des entiers naturels pairs est noté $2\mathbb{N}$, et on a :

$$2\mathbb{N} = \{2n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

$\circ$ L'ensemble entiers naturels impairs est noté $2\mathbb{N} + 1$, et on a :

$$2\mathbb{N} + 1 = \{2n + 1 \mid n \in \mathbb{N}\}$$

$\circ$ Il peut y avoir plusieurs paramètres qui interviennent :

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^* \right\}$$

Remarque. Un même ensemble peut s'écrire selon les trois formalismes, par exemple :

$$2\mathbb{N} = \underbrace{\dots\dots\dots}_{\text{énumération}} = \underbrace{\dots\dots\dots}_{\text{condition}} = \underbrace{\{2n \mid n \in \mathbb{N}\}}_{\text{paramètre}}$$



Attention à ne pas confondre les écritures $\{x \in E \mid P(x)\}$ et $\{f(x) \mid x \in E\}$! En effet, $P(x)$ est une *assertion* : on peut lui associer la valeur vraie ou fausse. Par contre $f(x)$ est une *expression*, elle n'a aucune valeur logique en soi. Enfin, dans les deux écritures, x est une variable *muette* (cf Chapitre 0).

Exemple 5. Reconnaître les ensembles suivants :

$$A = \{x^2 + 1 \mid x \in \mathbb{R}^*\} = \dots\dots\dots$$

$$B = \left\{ n \in \mathbb{Z}^* \mid \frac{1}{n} \in \mathbb{Z} \right\} = \dots\dots\dots$$

1.3 Nombre d'éléments d'un ensemble

Définition 2.4

- Un ensemble est dit un singleton s'il ne contient qu'un seul élément.
- Un ensemble est dit fini s'il possède un nombre fini d'éléments. Sinon, il est dit infini.

Si E est un singleton, on peut écrire $E = \{a\}$ avec a l'unique élément de E .

Exemple 6.

- $\{0\}$, $\{6\}$ sont des singletons, mais $\{1, 2\}$ n'est pas un singleton.
- Tout singleton est un ensemble fini, mais la réciproque est fausse.
- $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ sont des ensembles infinis.

Enfin, il existe un ensemble très particulier dont la définition découle peu ou prou d'un axiome :

Définition 2.5 – Ensemble vide

On admet l'existence et l'unicité d'un ensemble qui ne contient aucun élément.
C'est l'ensemble vide. On le note : $\emptyset$

Plus généralement, on dit qu'un ensemble est vide s'il ne contient aucun élément (c'est donc l'ensemble vide).

1.4 Les intervalles de $\mathbb{R}$

Soit a et b deux réels. On construit des ensembles appelés intervalles, à partir de deux bornes parmi a , b et $\pm\infty$:

- Les intervalles bornés, qui ne possèdent pas de borne infinie :
 - $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$: intervalle fermé (en a et b).
 - $]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid \dots\dots\dots\}$: intervalle ouvert (en a et b).
 - $[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \mid \dots\dots\dots\}$: intervalle ouvert en b , fermé en a .
 - $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid \dots\dots\dots\}$: intervalle ouvert en a , fermé en b .
 - Cas particulier : si $a = b$, alors $[a, b] = [a, a] = \{a\}$: c'est un singleton.
 - Cas particulier : si $b < a$, alors tous les intervalles ci-dessus sont vides.
- Les intervalles non bornés, car au moins une de leurs bornes est $\pm\infty$:
 - $] -\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid \dots\dots\dots\}$: intervalle fermé en a . Idem pour $[a, +\infty[$.
 - $]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \mid \dots\dots\dots\}$: intervalle ouvert en a . Idem pour $] -\infty, a[$.
 - $] -\infty, +\infty[= \mathbb{R}$.

Remarque. Un intervalle avec une borne infinie est toujours ouvert en cette borne infinie.

Un intervalle est dit trivial s'il est vide ou si c'est un singleton (cela correspond au deux cas particuliers ci-dessus). Dans le cas contraire, l'intervalle est dit non trivial. Il contient alors une infinité d'éléments.

Définition 2.6 – “Intervalles d'entiers”

Soit $a, b \in \mathbb{Z}$ avec $a \leq b$. On note :

$$\llbracket a, b \rrbracket := \{a, a+1, a+2, \dots, b-1, b\}$$

On a ainsi $\llbracket 0, 5 \rrbracket = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, ou encore $\llbracket -100, 100 \rrbracket = \{-100, -99, \dots, 99, 100\}$.

1.5 Ensembles produits

Définition 2.7

- Étant donné x et y deux objets mathématiques quelconques (par exemple x est un réel et y une suite...), on définit un nouvel objet mathématique, le couple (x, y) .

$$(x, y) = (x', y') \quad \text{signifie} \quad x = x' \quad \text{et} \quad y = y'$$

- On définit de même les triplets (x, y, z) , quadruplets (x, y, z, t) , et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les n -uplets $(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

$$(x_1, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_n) \quad \text{signifie} \quad \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad x_i = y_i$$

Attention, les n -uplets tiennent compte de l'ordre : $(1, 2) \neq (2, 1)$.

De plus, on ne doit pas confondre $\{(1, 2)\}$, qui est un singleton qui contient le couple $(1, 2)$, et l'ensemble $\{1, 2\}$.

Définition 2.8 – Ensembles produits

- A et B étant deux ensembles, on définit le produit cartésien de A et B comme étant l'ensemble

$$A \times B := \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

- Étant donnés $n \in \mathbb{N}^*$ et $A_1, A_2, \dots, A_n$ des ensembles, on définit leur produit cartésien par

$$A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n := \{(a_1, \dots, a_n) \mid a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots, a_n \in A_n\}$$

- Enfin, pour simplifier l'écriture, on note

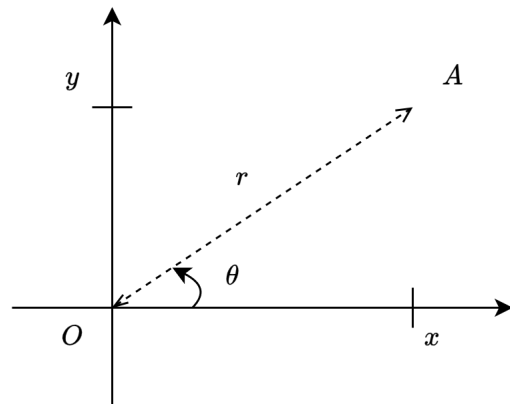
$$A^2 := A \times A \quad \text{et plus généralement} \quad A^n := \underbrace{A \times A \times \dots \times A}_{n \text{ fois}}$$

Cette année, on parlera notamment des ensembles $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ ou encore $\mathbb{R}^n$.

Exemple 7. On peut écrire : $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid (a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^* \right\} = \left\{ \frac{a}{b} \mid (a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \right\}$

Exemple 8. Le plan usuel peut être représenté par l'ensemble $\mathbb{R}^2$: en effet, à tout point A du plan on peut associer un et un seul couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Le couple (x, y) représente les coordonnées cartésiennes du point A .

Cependant, si le point A n'est pas sur l'origine, on peut aussi le représenter de manière unique par un couple $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times [0, 2\pi[$, càd $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in [0, 2\pi[$. Il s'agit des coordonnées polaires du point A . On les reverra au chapitre sur les nombres complexes.



2 Opérations sur les ensembles

2.1 Inclusion et appartenance

Définition 2.9

On dit que l'ensemble E est inclus dans F , et on note $E \subset F$, si tout élément de E est un élément de F .
On dit également que E est un sous-ensemble de F ou encore une partie de F .

Si E n'est pas inclus dans F , on note $E \not\subset F$.

Exemple 9. $\circ \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ (i.e. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$).

$\circ$ On a toujours (quelle que soit le prédicat P) :

$$\{x \in E \mid P(x)\} \subset E$$

$\circ$ Si f est une application de E à valeurs dans un ensemble G , alors

$$\{f(x) \mid x \in E\} \subset G$$

Exemple 10. On a toujours $E \subset E$ et $\emptyset \subset E$ (ceci sera justifié en partie 3).



Il ne faut pas confondre l'**élément** x qui **appartient** à E avec la **partie** $\{x\}$ qui est **incluse** dans E . On écrira donc :

$$0 \in \mathbb{N} \quad \{0\} \subset \mathbb{N} \quad \text{mais JAMAIS :}$$

$$\underbrace{0 \subset \mathbb{N} \quad \{0\} \in \mathbb{N}}_{\text{faux !}}$$

Exemple 11. Compléter les pointillés par $\in, \exists, \subset, \supset$ si un de ces symboles convient, ou par $\notin, \nexists, \neq$ dans le cas contraire.

$$\begin{array}{ll} [0,5] \dots\dots [0,5] & \mathbb{N} \dots\dots \sqrt[3]{27} \\ \sqrt{18} \dots\dots \{3\sqrt{2}\} & \{\sqrt{x} \mid x \in \mathbb{R}_+\} \dots\dots \mathbb{Z} \\ \{\sqrt{2}\} \dots\dots \mathbb{Q} & \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + x + 1 = 0\} \dots\dots \{0\} \end{array}$$

Théorème 2.10

$$(E \subset F \text{ et } F \subset G) \implies E \subset G$$

2.2 Montrer une inclusion ou une égalité d'ensembles

Pour raisonner sur des ensembles, il est **essentiel** de reformuler les assertions " $x \in E$ ", " $E \subset F$ " et " $E = F$ " grâce aux caractérisations ci-dessous.

Théorème 2.11 – Caractérisations d'appartenance

Pour tout $y \in E$:

$$y \in \{x \in E \mid P(x)\} \iff P(y)$$

Pour tout y dans l'ensemble d'arrivée d'une fonction f définie sur E :

$$y \in \{f(x) \mid x \in E\} \iff \exists x \in E \quad y = f(x)$$

Théorème 2.12 – Caractérisations de l'inclusion et de l'égalité

Le Théorème ci-dessus fournit la méthode type pour montrer une inclusion ou une équivalence, il suffit de montrer l'assertion équivalente.

Exemple 12. On pose $F = \left\{x + \frac{1}{x} \mid x \in \mathbb{R}_+^*\right\}$. Montrer que $]2, +\infty[\subset F$.

Pour montrer que deux ensembles E et F sont égaux, le plus classique est de montrer successivement que $E \subset F$ puis que $F \subset E$. On dit qu'on raisonne par double inclusion.

Exemple 13. On pose $E = \{x \in \mathbb{R} \mid \forall y > 0 \quad x \leq y\}$. Montrer que $E = \mathbb{R}_-$.

Remarque. Si A et B sont deux parties d'un même ensemble E , on dispose d'une autre caractérisation, moins utile en pratique :

2.3 Ensemble des parties de E

Un ensemble peut contenir n'importe quel objet mathématique, y compris... d'autres ensembles ! On peut par exemple poser $E = \{\mathbb{N}, \mathbb{Z}\}$: c'est un ensemble qui contient deux éléments, à savoir $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$. Bien que $\mathbb{N}$ soit lui-même un ensemble, c'est aussi un élément de l'ensemble E . On peut donc écrire $\mathbb{N} \in E$.

Exemple 14. L'ensemble $\{1, 2\}$ n'est pas un singleton, mais l'ensemble $\{\{1, 2\}\}$ est un singleton (qui contient pour seul élément l'ensemble $\{1, 2\}$).

Définition 2.13

On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E .

Théorème 2.14 – Caractérisation de l'appartenance à $\mathcal{P}(E)$

Pour tout ensemble A ,

Remarque. On a toujours $E \in \mathcal{P}(E)$ et $\emptyset \in \mathcal{P}(E)$.

Exemple 15. ◦ Si $E = \{\pi\}$, alors E ne possède que deux parties : et, donc :

$$\mathcal{P}(E) = \{ \dots\dots\dots \}$$

◦ Si $E = \{1, 2\}$, on a :

$$\mathcal{P}(E) = \{ \dots\dots\dots \}$$

◦ Si $E = \emptyset$, on a :

$$\mathcal{P}(E) = \dots\dots\dots$$

2.4 Opérations sur les parties d'un ensemble

Définition 2.15

Soit A et B deux parties de E (i.e. avec $A \subset E$ et $B \subset E$). On peut construire d'autres parties de E avec les opérations suivantes

- L'intersection de A et B est l'ensemble noté $A \cap B := \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \in B\}$
- La (ré)union de A et B est l'ensemble noté $A \cup B := \{x \in E \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$
- La différence de A et B est l'ensemble noté $A \setminus B := \{x \in A \mid x \notin B\}$
- Le complémentaire de A et B est l'ensemble $E \setminus A = \{x \in E \mid x \notin A\}$

Le complémentaire est parfois noté A^c ou $\bar{A}$.

Théorème 2.16 – Caractérisations de l'appartenance ($\cap$, $\cup$ et $\setminus$)

Soit A et B deux parties de E et $x \in E$.

$$x \in A \cap B \iff x \in A \text{ et } x \in B$$

$$x \in A \setminus B \iff x \in A \text{ et } x \notin B$$

$$x \in A \cup B \iff x \in A \text{ ou } x \in B$$

$$x \in \bar{A} \iff x \notin A$$

Exemple 16. $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est l'ensemble des nombres irrationnels : ce sont les réels qui ne peuvent pas s'écrire comme une fraction d'entiers. Par exemple, π et $\sqrt{2}$ sont irrationnels.

Exemple 17. Déterminer les ensembles suivants :

- $[-5, 5] \cap]0, +\infty[= \dots\dots\dots$
- $\mathbb{N} \cup \mathbb{Z} = \dots\dots\dots$
- $\mathbb{R} \setminus \mathbb{R}_+ = \dots\dots\dots$
- $\overline{[0, 1]} = \dots\dots\dots$ (on prend le complémentaire en tant que partie de $\mathbb{R}$)

2.5 Propriétés des opérations $\cap$, $\cup$ et passage au complémentaire

Théorème 2.17 – Identités liées à $\cap$, $\cup$ et au complémentaire

Soit A , B et C des parties de l'ensemble E .

- $A \cap B = B \cap A$ (commutativité de $\cap$)
- $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (associativité de $\cap$: on peut donc écrire $A \cap B \cap C$ sans ambiguïté)
- $A \cap \emptyset = \emptyset$, $A \cap A = A$
- $A \cup B = B \cup A$ (commutativité de $\cup$)
- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ (associativité de $\cup$: on peut donc écrire $A \cup B \cup C$ sans ambiguïté)
- $A \cup \emptyset = A$, $A \cup A = A$
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (distributivité de $\cap$ sur $\cup$)
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (distributivité de $\cup$ sur $\cap$)
- $\overline{\overline{A}} = A$
- $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ (une des deux lois de Morgan)
- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ (une des deux lois de Morgan)

Démonstration. Soit $x \in E$. On reformule les énoncés grâce aux caractérisations du Théorème 2.16, et aussi la caractérisation " $x \notin A \iff \text{non}(x \in A)$ ". Le reste découle des propriétés du chapitre de Logique. Par exemple :

□

Théorème 2.18 – Caractérisations de l'inclusion via $\cup$, $\cap$ et le complémentaire

Soit A et B deux parties de l'ensemble E .

- $A \subset B \iff A \cap B = A$
- $A \subset B \iff A \cup B = B$
- $A \subset B \iff \overline{B} \subset \overline{A}$

2.6 Partition d'un ensemble**Définition 2.19**

Deux ensembles A et B sont dits disjoints si $A \cap B = \emptyset$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Des ensembles $A_1, A_2, \dots, A_n$ sont dits disjoints deux à deux si quand on prend deux de ces ensembles, ils sont disjoints :

$$\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad i \neq j \implies A_i \cap A_j = \emptyset.$$

Définition 2.20

Une partition d'un ensemble E est une famille de sous-ensembles $A_1, A_2, \dots, A_n$ de E (avec $n \in \mathbb{N}^*$) qui sont tous non vides, deux à deux disjoints et dont la réunion donne E tout entier. Autrement dit, ils doivent vérifier :

Exemple 18. $2\mathbb{N}$ et $2\mathbb{N} + 1$ forment une partition de $\mathbb{N}$. $\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R}_-^*$ et $\{0\}$ forment une partition de $\mathbb{R}$.

Remarque (Raisonnement par disjonction de cas). Si $A_1, \dots, A_n$ forment une partition d'un ensemble E , alors

$$\forall x \in E \quad P(x) \iff \begin{cases} \forall x \in A_1 & P(x) \\ \dots \\ \forall x \in A_n & P(x) \end{cases} \iff \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad \forall x \in A_i \quad P(x)$$

2.7 Opérations avec une infinité d'ensembles

On peut définir l'union et l'intersection avec un nombre infini de sous-ensembles. Pour simplifier la présentation (et parce que c'est ce qui sert le plus en pratique), on considère le cas où on dispose d'une suite de sous-ensembles.

Définition 2.21

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de sous-ensembles de E . On définit

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n = A_1 \cap A_2 \cap \dots := \{x \in E \mid \forall k \in \mathbb{N}^* \quad x \in A_k\}$$

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n = A_1 \cup A_2 \cup \dots := \{x \in E \mid \exists k \in \mathbb{N}^* \quad x \in A_k\}$$

Remarque. Dans les égalités ci-dessus, les variables n, x, k sont toutes muettes.

Exemple 19. $\bigcup_{n=1}^{+\infty} [n, n+1[= \dots\dots\dots$ et $\bigcap_{n=1}^{+\infty}]n, n+1[= \dots\dots\dots$

Théorème 2.22 – Caractérisations d'appartenance ($\bigcup$ et $\bigcap$)

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de sous-ensembles de E et soit $x \in E$.

$$x \in \bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n \iff \forall n \in \mathbb{N}^* \quad x \in A_n$$

$$x \in \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \iff \exists n \in \mathbb{N}^* \quad x \in A_n$$

Exemple 20. Simplifier l'ensemble $A = \bigcap_{n=1}^{+\infty} \left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[$.

3 Complément : ensemble et logique

Soit $P(x)$ une proposition dépendant d'un élément x d'un ensemble quelconque. Par convention :

- “ $\forall x \in \emptyset \quad P(x)$ ” est toujours *vrai*.
- “ $\exists x \in \emptyset \quad P(x)$ ” est toujours *faux*.

Rappel : pour tout ensemble E ,

$$\emptyset \subset E \quad \Longleftrightarrow \quad \dots\dots\dots$$

Ainsi, grâce à la convention ci-dessus, on a bien $\emptyset \subset E$. Cette convention entraîne aussi le fait que “Faux $\implies$...” est vrai. En effet, pour deux propositions P et Q dépendant d'une variable x dans E :

$$(\forall x \in E \quad P(x) \implies Q(x)) \quad \Longleftrightarrow \quad \{x \in E \mid P(x)\} \subset \{x \in E \mid Q(x)\}$$

À présent, si $P(x)$ est fausse pour tout x de E , l'inclusion de droite se réécrit “ $\emptyset \subset \dots$ ”, ce qui est toujours vrai.

4 Méthodes pour les exercices

Méthode

Pour montrer que $E \subset F$, on montre " $\forall x \in E \quad x \in F$ ".

Méthode

Pour montrer que $E = F$, on raisonne par double inclusion.

Bien plus rarement, si A et B sont deux parties d'un même ensemble E , on peut montrer que $A = B$ en montrant " $\forall x \in E \quad x \in A \iff x \in B$ ".

Méthode

Pour exploiter une information de la forme " $x \in A \cup B$ ", il est souvent judicieux de réaliser une disjonction de cas :

- Si $x \in A$, alors ...
- Si $x \in B$, alors ...